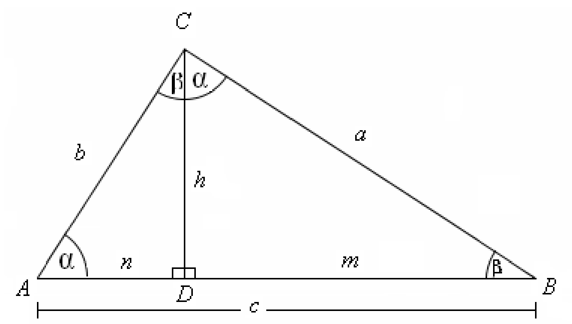
- Al trazar **la altura sobre la hipotenusa** de un triángulo rectángulo se obtienen diferentes relaciones entre los segmentos que se determinan.

B. Derivados del teorema de Pitágoras

Sea ΔABC un triángulo rectángulo en C. Sea D el pie de la altura sobre AB. Sea $\alpha = m\angle CAB$ y $\beta = m\angle CBA$.



Entonces, $\alpha + \beta = 90°$ y se cumple que las medidas de los ángulo señalados en la figura coinciden con α y β.

Además, los segmentos m y n se llaman **proyecciones** sobre la hipotenusa de los catetos a y b respectivamente y h es la altura sobre la hipotenusa de medida c.

Entonces, se cumple por el criterio a.a. que $\Delta ADC \sim \Delta CDB$, de donde se deduce que

$$\frac{AD}{CD} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow \frac{n}{h} = \frac{h}{m} \Rightarrow \boldsymbol{h^2 = mn}.$$

Esta relación es conocida como el Teorema de la Altura sobre la Hipotenusa.

Además, $\Delta ADC \sim \Delta ACB$, y se sigue que

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{n}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow \boldsymbol{b^2 = cn}.$$

Pero también, $\Delta CDB \sim \Delta ACB$, y se tiene que

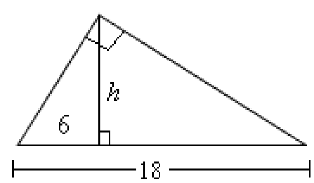
$$\frac{CB}{AB} = \frac{DB}{CB} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{m}{a} \Rightarrow \boldsymbol{a^2 = cm}.$$

Entonces, se cumple las siguientes relaciones conocidas como los **derivados del teorema de Pitágoras:** $h^2 = mn$, $b^2 = cn$, $a^2 = cm$, $a \cdot b = c \cdot h$.

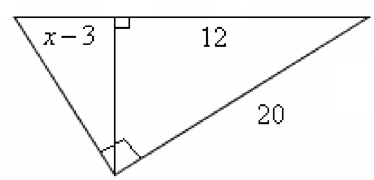
La primera también es conocida como el **Teorema de la altura sobre la hipotenusa.**

EJEMPLO 5. En las siguientes figuras encuentre los valores de las variables.

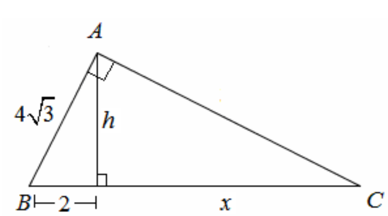
a)



b)



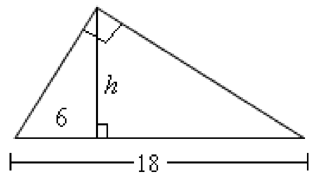
EJEMPLO 6. Calcule el área del triángulo ΔABC en la siguiente figura:



Soluciones B.

EJEMPLO 5. En las siguientes figuras encuentre los valores de las variables.

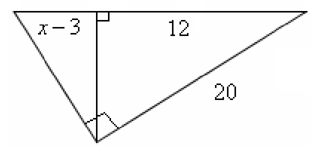
a)



Una de las proyecciones mide 6 y la otra $18-6=12$, entonces aplicando el teorema de la altura

$h^2=6\cdot 12 \Rightarrow h^2=72 \Rightarrow h=\pm\sqrt{72}$ y como $h>0$, $h=6\sqrt{2}$.

b)

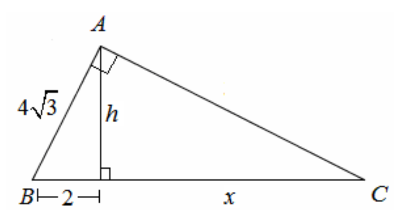


Si las proyecciones miden 12 y $x-3$, entonces la hipotenusa mide $12+(x-3)=x+9$. Aplicando la relación

$a^2=cm$ tenemos: $20^2=12(x+9)\Rightarrow 400=12x+108$.

$$\Rightarrow 292=12x \Rightarrow x=\frac{292}{12}=\frac{73}{3}$$

EJEMPLO 6. Calcule el área del triángulo ΔABC en la siguiente figura:



La fórmula del área es: $A=\dfrac{BC\cdot h}{2}$. h la podemos encontrar por Pitágoras:

$$h^2+2^2=\left(4\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow h^2+4=48 \Rightarrow h^2=44 \Rightarrow h=\pm\sqrt{44} \Rightarrow h=2\sqrt{11}.$$

Calculamos x con el teorema de la altura: $h^2=2\cdot x$

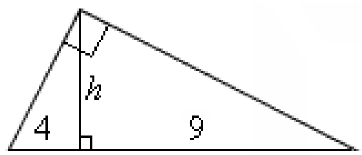
$$\Rightarrow \left(2\sqrt{11}\right)^2=2x \Rightarrow 44=2x \Rightarrow x=\frac{44}{2}=22$$

Así, $BC=2+22=24$, y el área es $A=\dfrac{24\cdot \cancel{2}\sqrt{11}}{\cancel{2}}=24\sqrt{11}\,cm^2$.

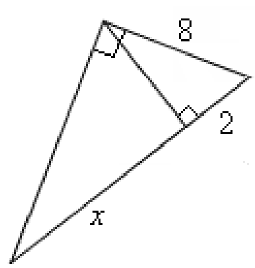
Ejercicio B.

I PARTE: En cada uno de los siguientes triángulos, encuentre los valores de las variables:

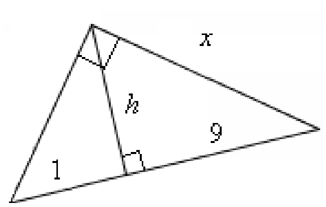
1.



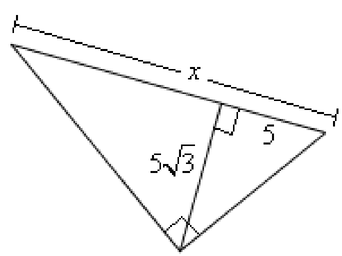
2.



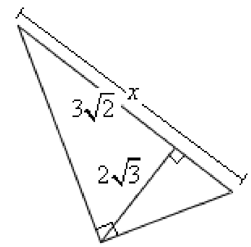
3.



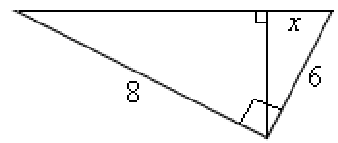
4.



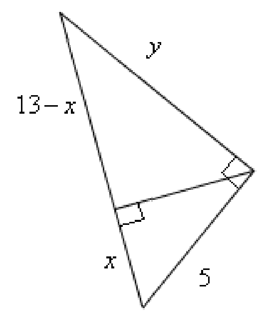
5.



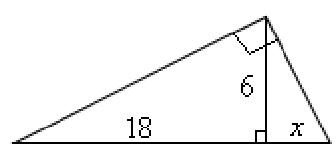
6.



7.



8.



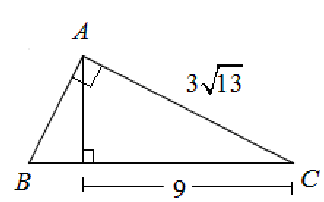
II PARTE: Resuelva los siguientes problemas

1. Justifique utilizando fórmulas de área de un triángulo que el producto de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al producto de la hipotenusa por su altura.

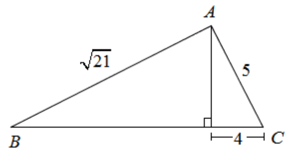
2. Si en un triángulo rectángulo, un cateto mide $12cm$, la hipotenusa mide $20cm$. Encuentre la medida del otro cateto aplicando el teorema de Pitágoras. Encuentre la medida de la altura sobre la hipotenusa utilizando la fórmula descrita en el ejercicio 1.

3. Si uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide $18cm$ y su proyección sobre la hipotenusa mide $12cm$. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

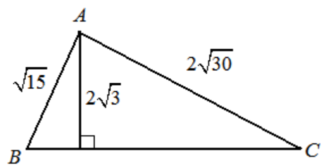
4. Calcule el área del siguiente triángulo.



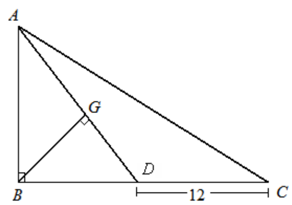
5. Calcule el área del siguiente triángulo.



6. Calcule el área del siguiente triángulo.

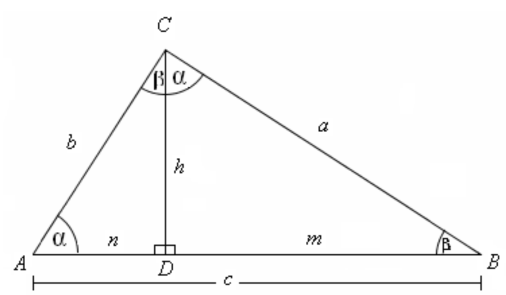


7. En la figura G es el baricentro del ΔABC. Encuentre la medida de $\overline{AG}$.



SUGERENCIA: Recuerde que si D es el punto medio de $\overline{BC}$ y G es el baricentro, entonces $AG = 2GD$.

8. Complete la siguiente demostración del teorema de Pitágoras.



a) De acuerdo con la figura, los derivados del teorema de Pitágoras, establecen: $a^2 =$ _______ · _______ y $b^2 =$ _______ · _______ .

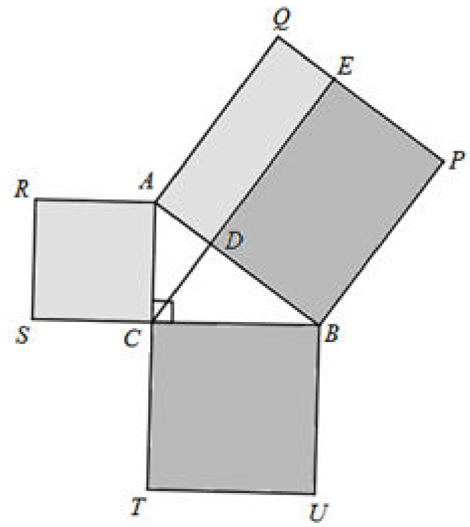
b) Al sumar, estas expresiones se obtiene: ____ + ____ $= c \cdot m + c \cdot n$.

c) Esto es equivalente a: $a^2 + b^2 = c($____ + ____$)$.

d) Como _______________.

Entonces, $a^2 + b^2 = c \cdot c \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

III PARTE: Como una demostración alternativa del teorema de Pitágoras, basada en la introducción de la sección A del capítulo anterior, haremos la siguiente construcción:



Considere el siguiente diagrama donde se da un triángulo rectángulo arbitrario y se construyen cuadrados exteriores $CBUT$, $ACSR$ y $AQPB$. Se dibuja $\overline{CD}$ la altura sobre $\overline{AB}$ y se prolonga hasta que interseque $\overline{QP}$ en E.

1. Compruebe que $BDEP$ y $ADEQ$ son rectángulos.

2. ¿Cuánto mide la altura dibujada desde A en el ΔABU?

3. Compruebe que $\Delta ABU \cong \Delta PBC$ y por lo tanto, $(PBC) = \dfrac{BC^2}{2}$.

4. ¿Cuánto mide la altura dibujada desde C en el ΔPBC?

5. Concluya que $\dfrac{BC^2}{2} = \dfrac{PB \cdot BD}{2}$, y por lo tanto, $(BDEP) = BC^2$.

6. De la misma manera, compruebe que $(AQDE) = AC^2$.

7. Concluya el teorema de Pitágoras.

Respuestas

Ejercicio B.
I PARTE:

1. $h=6$
2. $x=30$
3. $h=3$, $x=3\sqrt{10}$
4. $x=20$
5. $x=5\sqrt{2}$
6. $x=\frac{18}{5}$
7. $x=\frac{25}{13}$, $y=12$
8. $x=2$

II PARTE:

1. En un triángulo rectángulo de catetos a y b, e hipotenusa c, el área se puede calcular $A=\frac{a\cdot b}{2}$, o bien $A=\frac{c\cdot h}{2}$, donde h es la medida de la altura sobre la hipotenusa h. Así,
$\frac{a\cdot b}{2}=\frac{c\cdot h}{2}\Rightarrow a\cdot b=c\cdot h$

2. $a=16,\quad h=\frac{48}{5}$
3. 27
4. 39
5. $\left(6+3\sqrt{3}\right)ul^2$
6. $21ul^2$
7. $8\sqrt{3}$
8.
a. $a^2=c\cdot m$ y $b^2=c\cdot n$
b. $a^2+b^2=c\cdot m+c\cdot n$
c. $a^2+b^2=c\left(m+n\right)$
d. $m+n=c$

III PARTE:

1. Como al altura es perpendicular al lado, la prolongación también lo es dado que $\overline{AB}\|\overline{QP}$
2. BC
3. Criterio l.a.l y $\left(PBC\right)=\left(ABU\right)$
$=\frac{BU\cdot BC}{2}=\frac{BC^2}{2}$
4. BD
5. El área de $\left(PBC\right)$ también se puede calcular como
$\left(PBC\right)=\frac{BP\cdot BD}{2}\Rightarrow\frac{BC^2}{2}=\frac{BP\cdot BD}{2}$
$\Rightarrow BC^2=BP\cdot BD=\left(BDEP\right)$
El área de $\left(AQDE\right)=AD\cdot AQ$ y
$\frac{AD\cdot AQ}{2}=\left(CAQ\right)=\left(RAB\right)$
$=\frac{AR\cdot AC}{2}=\frac{AC\cdot AC}{2}$
$\Rightarrow AD\cdot AQ=AC^2$
$AB^2=\left(ABPQ\right)=\left(BDEP\right)+\left(AQDE\right)$
$=BC^2+AC^2$